با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی (۲) پایه یازدهم
پودمان سوم

عنوان فصل: زاویه‌های دلخواه و نسبت‌های مثلثاتی آنها

از صفحه‌ی ۶۱ تا صفحه‌ی ۹۲ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل زاویه‌های دلخواه و نسبت‌های مثلثاتی آنها آمده است.

مباحث فصل: زاویه‌ی چرخش، رادیان، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه، شیب خط و تانژانت زاویه‌ها

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۶۶ · کار در کلاس — دوچرخه‌سوار روی مسیر دایره‌ای ... ۵

۲ صفحه ۶۷ · مسئله — وصل کردن زاویه‌های چرخش به شکل‌ها ... ۶

۳ صفحه ۶۷ · مسئله — نقاط متناظر زاویه‌های چرخش ۷

۴ صفحه ۶۷ · مسئله — زاویه‌ی چرخش صفر درجه ۷

۵ صفحه ۶۷ · مسئله — پنج دور دویدن ۷

۶ صفحه ۶۷ · مسئله — نقاط متناظر دو زاویه‌ی قرینه ۸

۷ صفحه ۶۸ · فعالیت — رابطه‌ی زاویه‌ی چرخش و مسافت طی شده ... ۸

۸ صفحه ۷۱ · کار در کلاس — تبدیل درجه و رادیان ۹

۹ صفحه ۷۳ · مسئله — درجه به رادیان ۱۱

۱۰ صفحه ۷۳ · مسئله — رادیان به درجه ۱۱

۱۱ صفحه ۷۳ · مسئله — انطباق نیم‌خط پس از چرخش ۱۱

۱۲ صفحه ۷۳ · مسئله — طول کمان و زاویه بر حسب رادیان ... ۱۲

۱۳ صفحه ۷۳ · مسئله — چرخ با پره‌های ۶۰ سانتی‌متری ۱۲

۱۴ صفحه ۷۳ · مسئله — چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر ۱۳

۱۵ صفحه ۷۶ · فعالیت — سینوس و کسینوس زاویه‌ی π − θ ... ۱۳

۱۶ صفحه ۷۸ · کار در کلاس — نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی π + θ ... ۱۴

۱۷ صفحه ۷۹ · کار در کلاس — نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی −θ ... ۱۴

۱۸ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — افزودن مضرب‌های 2π به زاویه ... ۱۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۹ صفحه ۸۱ · فعالیت — تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه ۱۶

۲۰ صفحه ۸۲ · فعالیت — بازه‌ی تغییر سینوس و کسینوس ۱۶

۲۱ صفحه ۸۳ · کار در کلاس — رابطه‌ی $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ۱۷

۲۲ صفحه ۸۴ · مسئله — تعیین ربع زاویه ۱۸

۲۳ صفحه ۸۴ · مسئله — علامت sin و cos زاویه‌ی $-5\pi/4$ ۱۸

۲۴ صفحه ۸۴ · مسئله — علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌ها ۱۹

۲۵ صفحه ۸۵ · مسئله — دوچرخه‌سوار روی مسیر دایره‌ای شعاع ۵۰ متر ۱۹

۲۶ صفحه ۸۵ · مسئله — نسبت‌های مثلثاتی در ربع سوم ۲۰

۲۷ صفحه ۸۵ · مسئله — $\sin\theta = -2/3$ ۲۰

۲۸ صفحه ۸۵ · مسئله — اثبات تساوی‌های تانژانت ۲۰

۲۹ صفحه ۸۵ · مسئله — زاویه‌هایی با تانژانت ۱- ۲۱

۳۰ صفحه ۸۷ · فعالیت — شیب خط با شیب مثبت و تانژانت زاویه ۲۱

۳۱ صفحه ۸۹ · فعالیت — شیب خط با شیب منفی و تانژانت زاویه ۲۲

۳۲ صفحه ۹۰ · کار در کلاس — خط و زاویه با محور طول‌ها ۲۲

۳۳ صفحه ۹۱ · مسئله — زاویه و شیب خط در شکل‌ها ۲۳

۳۴ صفحه ۹۱ · مسئله — خط با زاویه‌ی ۲۰ درجه ۲۳

۳۵ صفحه ۹۱ · مسئله — زاویه‌ی خط گذرنده از دو نقطه ۲۴

۳۶ صفحه ۹۱ · مسئله — برخورد خط با محور طول‌ها ۲۴

۳۷ صفحه ۹۱ · مسئله — مثلث حاصل از دو خط و محور طول‌ها ۲۴

۳۸ صفحه ۹۱ · مسئله — خطوط $3x - 5y = c$ ۲۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۶۶ کار در کلاس

دوچرخه‌سواری در یک مسیر دایره‌ای‌شکل، از نقطه‌ی A با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. او یک دور این دایره را در ۳ دقیقه طی می‌کند. ۱) دوچرخه‌سوار، یک چهارم این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایره با یک نقطه مشخص کنید.

۲) اگر دوچرخه‌سوار پس از ۲۰ ثانیه (1/3 دقیقه) به نقطه‌ی B رسیده باشد، زاویه‌ی بین دو شعاع OA و OB چند درجه است؟

۳) این دوچرخه‌سوار پس از ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟

۴) اگر یک دوربین فیلم‌برداری از مرکز دایره به دوچرخه‌سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟

۵) جدول (زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه و زاویه‌ی چرخش دوربین) را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

---

۱) یک دور کامل ۳ دقیقه طول می‌کشد، پس یک چهارم دور زمانی برابر 3/4 دقیقه، یعنی ۴۵ ثانیه لازم دارد. چون چرخش یک چهارم دور برابر 90° است، دوچرخه‌سوار روی دایره در نقطه‌ای قرار می‌گیرد که شعاع آن بر OA عمود است (بالاترین نقطه‌ی دایره، اگر A را در سمت راست در نظر بگیریم).

۲) یک دور ۳ دقیقه یعنی ۱۸۰ ثانیه است و ۲۰ ثانیه، 1/9 = 20/180 دور است:

360 x 1/9 = 40

زاویه‌ی بین OA و OB برابر ۴۰ درجه است.

۳) ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه یعنی یک دور کامل و ۲۰ ثانیه‌ی دیگر. پس از یک دور کامل دوچرخه‌سوار دوباره در A است و با ۲۰ ثانیه‌ی بعدی 40° جلوتر می‌رود:

او در نقطه‌ای قرار می‌گیرد که با OA زاویه‌ی ۴۰ درجه می‌سازد (همان نقطه‌ی B قسمت قبل).

۴) در هر ۳ دقیقه، دوربین ۳۶۰ درجه می‌چرخد، پس در هر دقیقه:

360 / 3 = 120

دوربین در هر دقیقه ۱۲۰ درجه می‌چرخد.

۵) زاویه‌ی چرخش دوربین برابر 120 x t است (t زمان بر حسب دقیقه). برای چند زمان نمونه:

جدول کامل‌شده

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

زمان (دقیقه)	1/3	3/4	۱	3/2	۲	۳	۴	13/3
زاویه‌ی چرخش دوربین (درجه)	۴۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۴۰	۳۶۰	۴۸۰	۵۲۰
وضعیت دوچرخه‌سوار	یک‌نهم دور	بالاترین نقطه	یک‌سوم دور	نقطه‌ی مقابل A	دو سوم دور	برگشته به A	یک دور و ۱۲۰ درجه	یک دور و ۱۶۰ درجه

توضیح: زمان‌ها در متن کتاب خوانا نبودند و چند زمان نمونه انتخاب شده است؛ برای هر زمان دیگر نیز کافی است زاویه‌ی t 120 درجه را محاسبه کنید. مثلاً در ۳ دقیقه، ۳۶۰ درجه و مکان او دوباره نقطه‌ی A است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ صفحه ۶۷ مسئله

در شکل‌های زیر چند زاویه‌ی چرخش رسم شده‌اند. زاویه‌های چرخش داده شده (340°، 180°، -410°، -240°، 120° یا -120° و 390°) را به شکل‌های صحیح آن وصل کنید.

برای تطبیق هر زاویه با شکل، جهت چرخش و مقدار آن را بررسی می‌کنیم (جهت مثبت: خلاف حرکت عقربه‌های ساعت):

- 340°: چرخش مثبت، کمی کمتر از یک دور کامل (نیم‌خط متحرک در ربع چهارم و ۲۰ درجه مانده به نیم‌خط اول)؛
- 180°: چرخش مثبت به اندازه‌ی نیم‌دور؛ دو نیم‌خط در امتداد هم و در خلاف جهت یکدیگرند؛
- -410°: چرخش منفی (موافق عقربه‌های ساعت)، یک دور کامل و ۵۰ درجه‌ی دیگر؛ نیم‌خط در ربع چهارم قرار می‌گیرد؛
- -240°: چرخش منفی به اندازه‌ی دو سوم دور؛ نیم‌خط در ربع دوم، همان جای 120° قرار می‌گیرد؛
- 120°: چرخش مثبت، یک سوم دور؛ نیم‌خط در ربع دوم؛
- 390°: چرخش مثبت، یک دور کامل و ۳۰ درجه‌ی دیگر؛ نیم‌خط در ربع اول.

هر زاویه را به شکلی وصل می‌کنیم که هم جهت چرخش (مثبت یا منفی) و هم تعداد دورهای آن با این توصیف‌ها بخواند. (چون شکل‌ها در دسترس نیستند، توصیف هر شکل به صورت بالا آمده است.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۳ صفحه ۶۷ مسئله

در دایره‌ی مقابل، نقطه‌ی A مبدأ در نظر گرفته شده است. نقاط متناظر زاویه‌های 50°، 145°، 300°، 460°، -60° و -180° را روی این دایره نشان دهید.

نقطه‌ی A را سمت راست دایره (0°) می‌گیریم و جهت مثبت را خلاف عقربه‌های ساعت. در هر مورد زاویه را با یک دور کامل (360°) کم یا زیاد می‌کنیم تا بین -360° و 360° قرار گیرد:

جای نقاط

زاویه	توضیح	ربع / موقعیت
50°	چرخش مثبت ۵۰ درجه	ربع اول
145°	$90^\circ < 145^\circ < 180^\circ$	ربع دوم
300°	$270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$	ربع چهارم
460°	$460 - 360 = 100$، یک دور کامل و ۱۰۰ درجه	ربع دوم (همان جای 100°)
-60°	چرخش ۶۰ درجه موافق عقربه‌ها (همان جای 300°)	ربع چهارم
-180°	نیم‌دور موافق عقربه‌ها	نقطه‌ی مقابل A (سمت چپ دایره)، همان جای 180°

۴ صفحه ۶۷ مسئله

وضعیت دو نیم‌خط که زاویه‌ی چرخش آن‌ها صفر درجه است چگونه است؟

زاویه‌ی چرخش صفر یعنی نیم‌خط متحرک اصلاً نچرخیده است؛ پس دو نیم‌خط کاملاً بر هم منطبق‌اند (نقطه‌ی متناظر همان مبدأ A است).

دو نیم‌خط بر هم منطبق‌اند.

۵ صفحه ۶۷ مسئله

اگر دوشنده‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای‌شکل در جهت مثبت بدود، زاویه‌ی چرخش او نسبت به نقطه‌ی شروع چند درجه است؟

هر دور کامل 360° است، پس:

5 x 360 = 1800

زاویه‌ی چرخش او ۱۸۰۰ درجه است (و او دوباره در نقطه‌ی شروع قرار دارد).

۶ صفحه ۶۷ مسئله

یک دایره و یک مبدأ روی آن انتخاب کنید. نقاط متناظر دو زاویه‌ی چرخش 120° و -120° را روی آن بیابید. از لحاظ هندسی، این نقاط چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دو زاویه‌ی قرینه‌ی دیگر مثال بزنید و وضعیت نقاط متناظر آن‌ها را نسبت به هم توصیف کنید. آیا این وضعیت برای هر دو زاویه که قرینه‌ی هم باشند برقرار است؟

دایره‌ی واحد را با مبدأ A(1, 0) در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی متناظر 120° در ربع دوم و با مختصات (-1/2, sqrt(3)/2) است؛ نقطه‌ی متناظر -120° در ربع سوم و با مختصات (-1/2, -sqrt(3)/2) است.

طول دو نقطه برابر و عرض‌هایشان قرینه‌اند، پس این دو نقطه نسبت به **خط افقی گذرنده از مبدأ A (محور طول‌ها)** قرینه‌ی یکدیگرند.

دو مثال دیگر: زاویه‌های 30° و -30° ؛ نقاط آن‌ها (sqrt(3)/2, 1/2) و (sqrt(3)/2, -1/2) هستند که باز نسبت به محور افقی قرینه‌اند. همچنین 50° و -50°.

بله؛ برای هر دو زاویه‌ی قرینه θ و -θ، چون یکی در جهت مثبت و دیگری در جهت منفی و به یک اندازه از A فاصله می‌گیرد، نقاط متناظر نسبت به محور افقی (خط گذرنده از مبدأ حرکت) قرینه‌اند. (در حالت خاص 180° و -180° دو نقطه بر هم منطبق‌اند.)

۷ صفحه ۶۸ فعالیت

دایره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید و روی آن نقطه‌ی A را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید. ۱) اگر از مبدأ، در جهت مثبت، شروع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل، زاویه‌ی چرخش چند درجه است؟ مسافت طی شده چقدر است؟

۲) به ازای هر یک درجه زاویه‌ی چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

۳) اگر D زاویه‌ی چرخش بر حسب درجه و L مسافت طی شده باشد، نسبت D/L چقدر است؟

۴) رابطه‌ای بنویسید که D را بر حسب L بیان کند و رابطه‌ای بنویسید که L را بر حسب D بیان کند.

۱) پس از یک دور کامل، زاویه‌ی چرخش 360° و مسافت طی شده برابر محیط دایره است:

$L = 2\pi r$ و $D = 360^\circ$

۲) برای 360° مسافت $2\pi r$ است، پس برای 1°:

(2 pi r)/360 = (pi r)/180

به ازای هر درجه، مسافت (pi r)/180 طی می‌شود.

۳) نسبت D/L برای تمام نقاط ثابت است (دو کمیت متناسب مستقیم‌اند):

D/L = 360/(2 pi r) = 180/(pi r)

۴) از تساوی بالا:

L = (pi r/180) D و D = (180/(pi r)) L

۸ صفحه ۷۱ | کار در کلاس

۱) زاویه‌های 30° و 45° و 60° و 90° را بر حسب رادیان بنویسید.

۲) در جدول زیر تعدادی زاویه بر حسب درجه و رادیان داده شده است (360°، -270°، 55° و $-15\pi/4$، $11\pi/3$ رادیان). معادل آن‌ها را بر حسب واحد دیگر بیابید و جدول را کامل کنید.

۳) نقاط متناظر زاویه‌های $\pi/6$، 0، $-\pi/3$، 2π، $\pi/2$، $3\pi/2$، $-\pi$، $-5\pi/6$ و $7\pi/3$ را روی دایره مشخص کنید.

۴) در شکل زیر یک شش‌ضلعی منتظم را داخل دایره رسم کرده‌ایم به گونه‌ای که یکی از رأس‌های آن روی نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی صفر است (نقطه‌ی A). الف) بقیه‌ی رئوس این چندضلعی، متناظر چه زاویه‌هایی (بر حسب درجه) هستند؟ ب) اگر شش‌ضلعی بالا به اندازه‌ی ۳۰ درجه در جهت مثبت دوران کند به طوری که رأس A به A' انتقال یابد، رئوس این چندضلعی جدید متناظر چه زاویه‌هایی هستند؟

از رابطه‌ی R = (pi/180) D و D = (180/pi) R استفاده می‌کنیم.

۱)

- $30^\circ = 30 \times \pi/180 = \pi/6$
- $45^\circ = \pi/4$
- $60^\circ = \pi/3$
- $90^\circ = \pi/2$

۲)

جدول کامل‌شده

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

زاویه	۱	۲	۳	۴	۵
درجه	360°	−270°	55°	−675°	660°
رادیان	2 pi	−3 pi/2	11 pi/36	−15 pi/4	11 pi/3

محاسبه‌ها: 360 x pi/180 = 2 pi؛ −270 x pi/180 = −3 pi/2؛ 55 pi/180 = 11 pi/36؛ −15 pi/4 x 180/pi = −675؛ −15 x 45 = −675؛ 11 pi/3 x 180/pi = 11 x 60 = 660.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳) دایره‌ی واحد با مبدأ A(1, 0)؛ با توجه به pi = 180°:

نقاط متناظر

زاویه	معادل درجه	موقعیت نقطه روی دایره
pi/6	30°	ربع اول، (sqrt(3)/2, 1/2)
0	0°	نقطه‌ی A، (1, 0)
−pi/3	−60°	ربع چهارم، (1/2, −sqrt(3)/2)
2 pi	360°	یک دور کامل، همان نقطه‌ی A
pi/2	90°	بالاترین نقطه، (0, 1)
3 pi/2	270°	پایین‌ترین نقطه، (0, −1)
−pi	−180°	نقطه‌ی (−1, 0) (سمت چپ)
pi	180°	نقطه‌ی (−1, 0) (منطبق بر نقطه‌ی −pi)
−5 pi/6	−150°	ربع سوم، (−sqrt(3)/2, −1/2) (همان جای 210°)
7 pi/3	420°	یک دور و pi/3؛ ربع اول، (sqrt(3)/2, 1/2)

۴) الف) زاویه‌ی مرکزی هر ضلع شش‌ضلعی منتظم 360/6 = 60 درجه است. با شروع از A و حرکت در جهت مثبت، رأس‌های بعدی متناظر زاویه‌های:

60°، 120°، 180°، 240°، 300°

هستند (و رأس A متناظر 0° است).

ب) با ۳۰ درجه دوران در جهت مثبت، به همه‌ی زاویه‌ها ۳۰ درجه اضافه می‌شود:

30° (رأس A')، 90°، 150°، 210°، 270°، 330°

(برچسب رأس‌ها در شکل خوانا نبود؛ فرض شده رأس‌ها در جهت مثبت دنبال هم آمده‌اند.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹ صفحه ۷۳ مسئله

زاویه‌های 15°، 190°، 530° و -1000° را بر حسب رادیان بنویسید.

از R = D x pi/180 استفاده می‌کنیم:

- 15 x pi/180 = pi/12
- 190 x pi/180 = 19 pi/18
- 530 x pi/180 = 53 pi/18
- −1000 x pi/180 = −50 pi/9

۱۰ صفحه ۷۳ مسئله

زاویه‌های −14 pi/5، −8 pi/3، 4 pi/3 و 7 pi/2 را بر حسب درجه بنویسید.

از D = R x 180/pi استفاده می‌کنیم:

- −14 pi/5 x 180/pi = −14 x 36 = −504 درجه
- −8 pi/3 x 180/pi = −8 x 60 = −480 درجه
- 4 pi/3 x 180/pi = 240 درجه
- 7 pi/2 x 180/pi = 630 درجه

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱ صفحه ۷۳ مسئله

اگر یک نیم‌خط بعد از چرخش روی حالت اول خود منطبق شود، توضیح دهید زاویه‌ی چرخش آن بر حسب رادیان چه مقادیری می‌تواند باشد؟

نیم‌خط فقط وقتی روی حالت اول منطبق می‌شود که تعداد صحیحی دور کامل (در جهت مثبت یا منفی) چرخیده باشد. هر دور کامل 2 pi رادیان است، پس:

θ = 2 k pi (k عددی صحیح؛ مثلاً 0, ±2 pi, ±4 pi, ...)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۷۳ مسئله

در یک دایره به شعاع r، اگر زاویه‌ی یک کمان بر حسب رادیان θ باشد، طول این کمان بر حسب r و θ چقدر است؟

بنا به تعریف رادیان، θ = L/r؛ پس:

L = r θ

۱۳ صفحه ۷۳ مسئله

طول پره‌های یک چرخ ۶۰ سانتی‌متر است. این چرخ را روی زمین بدون لغزش می‌چرخانیم. با مثبت در نظر گرفتن جهت چرخش، الف) پس از طی ۱۰۰ متر مسافت، زاویه‌ی چرخش یکی از پره‌ها نسبت به حالت اولیه‌ی آن (بر حسب درجه و رادیان) چقدر است؟ ب) اگر یکی از پره‌ها ۳۰۰۰ درجه چرخش کرده باشد، چرخ چند متر طی کرده است؟ پ) تحقیق کنید که کیلومترشمار ماشین، مسافت طی شده را چگونه نشان می‌دهد؟

شعاع چرخ r = 0.6 متر است و چون چرخ بدون لغزش می‌غلتد، مسافت طی شده روی زمین برابر طول کمان چرخیده‌شده است: L = r θ.

الف) θ = L/r = 100/0.6 = 500/3 ~ 166.7 رادیان، و بر حسب درجه:

D = 500/3 x 180/pi = 30000/pi ~ 9549

زاویه‌ی چرخش حدود ۱۶۶٫۷ رادیان، یعنی حدود ۹۵۴۹ درجه است.

ب) ابتدا ۳۰۰۰ درجه را به رادیان تبدیل می‌کنیم: 3000 x pi/180 = 50 pi/3. پس:

L = 0.6 x 50 pi/3 = 10 pi ~ 31.4

چرخ حدود ۳۱٫۴ متر راه رفته است.

پ) کیلومترشمار (مسافت‌شمار) تعداد دورهای چرخ را با یک حسگر یا چرخ‌دنده می‌شمارد و آن را در محیط چرخ (2 pi r) ضرب می‌کند؛ یعنی مسافت را از رابطه‌ی L = r θ به دست می‌آورد، که در آن θ مجموع زاویه‌ی چرخش چرخ بر حسب رادیان است. اندازه‌ی شعاع چرخ در دستگاه ثبت شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴ صفحه ۷۳ مسئله

در یک چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیه‌ی خود، به اندازه‌ی ۱ رادیان چرخیده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟ اگر مسافت طی شده توسط کابین ۷۰ متر باشد، زاویه‌ی چرخش کابین بر حسب رادیان و درجه چقدر است؟

از $L = r\,\theta$ استفاده می‌کنیم:

$L = 10 \times 1 = 10$

مسافت طی شده ۱۰ متر است.

اگر $L = 70$ باشد:

$\theta = L/r = 70/10 = 7$ رادیان، و $D = 7 \times 180/\pi \sim 401.1$ درجه.

زاویه‌ی چرخش ۷ رادیان، یعنی حدود ۴۰۱٫۱ درجه است.

۱۵ صفحه ۷۶ فعالیت

۱) فرض کنید θ یک زاویه‌ی تند بر حسب رادیان باشد، $\pi - \theta$ چه نوع زاویه‌ای است؟

۲) با رسم شکل، وضعیت نقاط متناظر دو زاویه‌ی θ و $\pi - \theta$ روی دایره‌ی مثلثاتی را نسبت به هم و محور سینوس‌ها مشخص کنید.

۳) سینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) کسینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱) چون $0 < \theta < \pi/2$، داریم $\pi/2 < \pi - \theta < \pi$؛ پس $\pi - \theta$ یک زاویه‌ی **باز** است و نقطه‌ی متناظر آن در ربع دوم قرار دارد.

۲) نقطه‌ی متناظر θ در ربع اول و نقطه‌ی متناظر $\pi - \theta$ در ربع دوم است. این دو نقطه هم‌ارتفاع‌اند (روی یک خط افقی) و به یک اندازه از محور سینوس‌ها (محور عمودی) فاصله دارند:

دو نقطه نسبت به محور سینوس‌ها قرینه‌ی یکدیگرند.

۳) چون عرض دو نقطه برابر است:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

۴) طول دو نقطه قرینه‌ی هم است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

۱۶ صفحه ۷۸ کار در کلاس

۱) اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی باشد، نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی θ + pi در کدام ربع قرار دارد؟

۲) وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و θ + pi نسبت به هم چگونه است؟

۳) طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱) افزودن pi یعنی نیم‌دور بیشتر چرخیدن؛ پس نقطه‌ی متناظر θ + pi در **ربع سوم** است.

۲) دو نقطه روی یک قطر دایره و در دو سوی مرکز قرار دارند؛ یعنی نسبت به **مبدأ مختصات (مرکز دایره)** قرینه‌اند.

۳) طول و عرض هر نقطه، قرینه‌ی طول و عرض نقطه‌ی دیگر است.

۴) سینوس‌ها (عرض) و کسینوس‌ها (طول) قرینه‌ی هم‌اند:

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \ ، \ \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

۱۷ صفحه ۷۹ کار در کلاس

۱) اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی باشد، نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی −θ در کدام ربع قرار دارد؟

۲) وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و −θ نسبت به هم چگونه است؟

۳) طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱) چرخش منفی (موافق عقربه‌های ساعت) از A ، به ربع **چهارم** می‌رسد.

۲) دو نقطه نسبت به محور کسینوس‌ها (محور افقی) قرینه‌اند.

۳) طول دو نقطه برابر و عرض‌هایشان قرینه‌ی یکدیگر است.

۴) کسینوس‌ها برابر و سینوس‌ها قرینه‌اند:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ ، \ \cos(-\theta) = \cos\theta$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

۱۸ صفحه ۸۰ کار در کلاس

۱) نقاط متناظر زاویه‌های داده شده در جدول (pi/3، pi/3 + 2 pi، pi/3 – 2 pi، pi/3 + 4 pi، pi/3 – 4 pi) را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید، سپس جدول را کامل کنید.

۲) اگر به یک زاویه مانند θ (بر حسب رادیان) مضرب صحیحی از 2 pi را اضافه یا کم کنیم، نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

۳) با ذکر دلیل، نتیجه بگیرید اگر به زاویه‌ای (بر حسب رادیان) مضارب صحیح 2 pi را اضافه یا کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند.

۴) سینوس و کسینوس زاویه‌های 14 pi/3 و 25 pi/6– رادیان را حساب کنید.

۱) همه‌ی این زاویه‌ها با pi/3 (60°) به اندازه‌ی چند دور کامل اختلاف دارند، پس نقطه‌ی متناظرشان یکی است و در ربع اول، با مختصات (1/2, sqrt(3)/2) قرار دارد:

جدول کامل‌شده

θ	pi/3	pi/3 + 2 pi	pi/3 – 2 pi	pi/3 + 4 pi	pi/3 – 4 pi
sin θ	sqrt(3)/2	sqrt(3)/2	sqrt(3)/2	sqrt(3)/2	sqrt(3)/2
cos θ	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

۲) هر 2 pi یک دور کامل است؛ پس نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی جدید بر نقطه‌ی متناظر θ **منطبق** است.

۳) نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، مختصات نقطه‌ی متناظر آن روی دایره‌ی مثلثاتی‌اند؛ چون نقاط متناظر بر هم منطبق‌اند، مختصاتشان برابر است. پس برای هر عدد صحیح k:

cos(θ + 2 k pi) = cos θ ، sin(θ + 2 k pi) = sin θ

۴) 14 pi/3 = 4 pi + 2 pi/3 و 2 pi/3 = pi – pi/3:

sin(14 pi/3) = sin(2 pi/3) = sin(pi – pi/3) = sin(pi/3) = sqrt(3)/2

cos(14 pi/3) = cos(pi – pi/3) = –cos(pi/3) = –1/2

–25 pi/6 = –4 pi – pi/6:

sin(–25 pi/6) = sin(–pi/6) = –sin(pi/6) = –1/2

cos(–25 pi/6) = cos(–pi/6) = cos(pi/6) = sqrt(3)/2

۱۹ صفحه ۸۱ فعالیت

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را با زاویه‌ی تند θ در نظر بگیرید (وتر مثلث ۱ واحد است). ۱) طول ضلع AB را بر حسب sin θ بنویسید.

۲) طول ضلع AC را بر حسب cos θ بنویسید.

۳) در این مثلث، tan θ را بر حسب sin θ و cos θ به دست آورید.

۴) به کمک رابطه‌ای که در (۳) به دست آوردید، برای تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه پیشنهادی ارائه کنید.

در مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۱، ضلع روبه‌رو به θ برابر sin θ و ضلع مجاور θ برابر cos θ است (در شکل، AB ضلع روبه‌رو و AC ضلع مجاور است).

۱) $AB = \sin\theta$

۲) $AC = \cos\theta$

۳) تانژانت، نسبت ضلع روبه‌رو به ضلع مجاور است:

$$\tan\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

۴) این تساوی را برای هر زاویه‌ی دلخواه α تعریف تانژانت می‌گیریم:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ ، به شرط } \cos\alpha \neq 0$$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰ صفحه ۸۲ فعالیت

یک دایره‌ی مثلثاتی را در نظر بگیرید. در این شکل، B نقطه‌ی متناظر زاویه‌ی θ است و C تصویر B روی محور کسینوس‌ها و D تصویر B روی محور سینوس‌ها است. وقتی θ در بازه‌های [[0, pi/2]]، [[pi/2, pi]]، [[pi, 3 pi/2]] و [[3 pi/2, 2 pi]] تغییر می‌کند، چگونگی تغییر مکان نقطه‌ی C روی محور کسینوس‌ها و نقطه‌ی D روی محور سینوس‌ها و مقدارهای cos θ و sin θ را در جدول مشخص کنید.

نقاط A(1, 0)، M(0, 1)، E(−1, 0) و N(0, −1) را در جهت مثبت روی دایره در نظر می‌گیریم. C روی محور افقی و D روی محور عمودی است.

جدول کامل‌شده

در بازه‌ی θ	0 تا pi/2	pi/2 تا pi	pi/2 تا pi 3	pi 3 تا 2 pi/2
مکان نقطه‌ی C	روی پاره‌خط OA	روی پاره‌خط OE	روی پاره‌خط OE	روی پاره‌خط OA
مقدار cos θ	در بازه‌ی [0, 1]	در بازه‌ی [−1, 0]	در بازه‌ی [−1, 0]	در بازه‌ی [0, 1]
مکان نقطه‌ی D	روی پاره‌خط OM	روی پاره‌خط OM	روی پاره‌خط ON	روی پاره‌خط ON
مقدار sin θ	در بازه‌ی [0, 1]	در بازه‌ی [0, 1]	در بازه‌ی [−1, 0]	در بازه‌ی [−1, 0]

در همه‌ی حالت‌ها 1 => sin θ => −1 و 1 => cos θ => −1.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۱ صفحه ۸۳ | کار در کلاس

۱) زاویه‌ی تند θ را در ربع اول دایره‌ی مثلثاتی در نظر بگیرید. با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ی OCB، درستی تساوی sin^2 θ + cos^2 θ = 1 را نشان دهید.

۲) تساوی بالا برای سایر زاویه‌ها نیز برقرار است. درستی این تساوی را برای چند زاویه در ربع‌های دیگر بررسی کنید.

۳) اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به طوری که sin θ = 3/5، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

۱) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OCB وتر OB شعاع دایره‌ی واحد و برابر ۱ است، OC = cos θ و CB = sin θ. طبق قضیه‌ی فیثاغورس:

OC^2 + CB^2 = OB^2 ⟹ cos^2 θ + sin^2 θ = 1

۲) برای هر نقطه‌ی (x, y) = (cos θ, sin θ) از دایره‌ی واحد، x^2 + y^2 = 1 است. چند مثال:

- θ = 150°: (sqrt(3)/2)^2 + (1/2)^2 = 3/4 + 1/4 = 1 (ربع دوم)
- θ = 240°: (−sqrt(3)/2)^2 + (−1/2)^2 = 3/4 + 1/4 = 1 (ربع سوم)
- θ = −30°: (sqrt(3)/2)^2 + (1/2)^2 = 1 (ربع چهارم)

۳) از sin^2 θ + cos^2 θ = 1: cos^2 θ = 1 − 9/25 = 16/25، پس cos θ = ±4/5. در ربع دوم کسینوس منفی است:

cos θ = −4/5 ، tan θ = (3/5)/(−4/5) = −3/4

۲۲ صفحه ۸۴ مسئله

۱) در جدول‌های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه‌های داده شده در کدام ربع از دایره‌ی مثلثاتی قرار دارند. زاویه‌ی θ بر حسب درجه: -80°، 140°، 280°، 363° زاویه‌ی θ بر حسب رادیان: $-3\pi/4$، $2\pi/5$، $7\pi/3$، $12\pi/5$

زاویه‌ها را (با کم یا زیاد کردن دور کامل) به بازه‌ی 0 تا 360° می‌آوریم:

ربع زاویه‌ها (درجه)

θ	-80°	140°	280°	363°
معادل در 0 تا 360°	280°	140°	280°	3°
مکان	ربع چهارم	ربع دوم	ربع چهارم	ربع اول

ربع زاویه‌ها (رادیان)

θ	$-3\pi/4$	$2\pi/5$	$7\pi/3$	$12\pi/5$
معادل در 0 تا 2π	$5\pi/4$	$2\pi/5$	$\pi/3$	$2\pi/5$
مکان	ربع سوم	ربع اول	ربع اول	ربع اول

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳ صفحه ۸۴ مسئله

با تعیین مکان زاویه‌ی $-5\pi/4$ تعیین کنید کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است. الف) $\cos(-5\pi/4) < 0$ و $\sin(-5\pi/4) < 0$ ب) $\cos(-5\pi/4) < 0$ و $\sin(-5\pi/4) > 0$ پ) $\cos(-5\pi/4) > 0$ و $\sin(-5\pi/4) < 0$ ت) $\cos(-5\pi/4) > 0$ و $\sin(-5\pi/4) > 0$

$-5\pi/4 = -\pi - \pi/4$؛ پس زاویه با چرخش ۲۲۵ درجه موافق عقربه‌های ساعت به دست می‌آید و نقطه‌ی متناظر آن با $-5\pi/4 + 2\pi = 3\pi/4$ یکی است که در ربع دوم قرار دارد.

در ربع دوم طول (کسینوس) منفی و عرض (سینوس) مثبت است:

$\cos(-5\pi/4) = \cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2 < 0$ ، $\sin(-5\pi/4) = \sin(3\pi/4) = \sqrt{2}/2 > 0$

گزینه‌ی (پ) صحیح است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۸۴ مسئله

جدول زیر را با مشخص کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها کامل کنید. در هر مورد مثالی بزنید.

علامت‌ها از علامت طول (کسینوس) و عرض (سینوس) نقطه‌ی متناظر به دست می‌آیند و tan θ = sin θ / cos θ:

علامت نسبت‌های مثلثاتی

نسبت مثلثاتی	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin θ	+	+	−	−
cos θ	+	−	−	+
tan θ	+	−	+	−
مثال	30°	150°	210°	330°

تحقیق مثال‌ها: sin 150° = 1/2 > 0، cos 150° = −sqrt(3)/2 < 0، tan 150° = −sqrt(3)/3 < 0؛ sin 210° = −1/2، cos 210° = −sqrt(3)/2، tan 210° = sqrt(3)/3 > 0؛ sin 330° = −1/2، cos 330° = sqrt(3)/2، tan 330° = −sqrt(3)/3.

۲۵ صفحه ۸۵ مسئله

دوچرخه‌سواری روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۵۰ متر، با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه از نقطه‌ی A شروع به حرکت می‌کند. دو محور عمود بر هم (مانند شکل) در این دایره رسم می‌کنیم. الف) اندازه‌ی زاویه‌ی چرخش (بر حسب رادیان) دوچرخه‌سوار را بر حسب زمان (ثانیه) به دست آورید. ب) اگر دوچرخه‌سوار پس از ۳۰ دقیقه حرکت بایستد، در کدام ربع از دایره ایستاده است؟

الف) مسافت طی شده پس از t ثانیه L = 2t متر است. از θ = L/r:

θ = 2t/50 = t/25 رادیان

ب) ۳۰ دقیقه برابر ۱۸۰۰ ثانیه است، پس:

θ = 1800/25 = 72 رادیان. هر دور کامل 2 pi ~ 6.283 رادیان است و 72/(2 pi) ~ 11.46؛ یعنی ۱۱ دور کامل (22 pi ~ 69.115)، و زاویه‌ی باقی‌مانده:

72 − 22 pi ~ 2.885 رادیان که بین pi/2 ~ 1.571 و pi ~ 3.142 است.

دوچرخه‌سوار در ربع دوم ایستاده است (با فرض اینکه A در ابتدای محور افقی مثبت باشد و حرکت در جهت مثبت انجام شود).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۶ صفحه ۸۵ مسئله

زاویه‌ی θ در ربع سوم است و cos θ = −1/5. سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

از sin^2 θ + cos^2 θ = 1 :sin^2 θ = 1 − 1/25 = 24/25، پس sin θ = ±2 sqrt(6)/5. در ربع سوم سینوس منفی است:

sin θ = −2 sqrt(6)/5

tan θ = (sin θ)/(cos θ) = (−2 sqrt(6)/5)/(−1/5) = 2 sqrt(6) ~ 4.9

---

۲۷ صفحه ۸۵ مسئله

اگر برای زاویه‌ی θ داشته باشیم sin θ = −2/3، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورد؟ چرا؟ چه اطلاعات دیگری را هم باید بدانیم؟

از cos^2 θ = 1 − 4/9 = 5/9 نتیجه می‌شود cos θ = ± sqrt(5)/3؛ چون سینوس منفی است، زاویه می‌تواند در ربع سوم (کسینوس منفی) یا ربع چهارم (کسینوس مثبت) باشد و هر دو حالت ممکن است:

- ربع سوم: cos θ = −sqrt(5)/3 و tan θ = 2/sqrt(5)
- ربع چهارم: cos θ = sqrt(5)/3 و tan θ = −2/sqrt(5)

با اطلاعات داده شده یکتا نیستند؛ باید بدانیم زاویه در کدام ربع است (یا علامت cos θ یا tan θ را بدانیم).

---

۲۸ صفحه ۸۵ مسئله

نشان دهید برای زاویه‌ی دلخواه θ تساوی‌های زیر برقرارند. tan(pi − θ) = −tan θ ، tan(pi + θ) = tan θ ، tan(−θ) = −tan θ

از tan α = sin α / cos α و تساوی‌های آموخته‌شده استفاده می‌کنیم:

tan(pi − θ) = sin(pi − θ)/cos(pi − θ) = (sin θ)/(−cos θ) = −tan θ

tan(pi + θ) = sin(pi + θ)/cos(pi + θ) = (−sin θ)/(−cos θ) = tan θ

$\tan(-\theta) = \sin(-\theta)/\cos(-\theta) = (-\sin\theta)/(\cos\theta) = -\tan\theta$

هر سه تساوی ثابت شد (برای زاویه‌هایی که $\cos\theta \neq 0$ است).

---

۲۹ صفحه ۸۵ **مسئله**

دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آن‌ها 1- است.

$\tan(\pi - \pi/4) = -\tan(\pi/4) = -1$؛ پس $3\pi/4$ (یعنی 135°) تانژانتش 1- است.

همچنین $\tan(-\pi/4) = -\tan(\pi/4) = -1$؛ پس $-\pi/4$ (یعنی -45°) نیز تانژانتش 1- است.

135° و -45° (و هر زاویه‌ی هم‌ارز با آن‌ها، مثل 315°)

---

۳۰ صفحه ۸۷ **فعالیت**

یک خط دلخواه به معادله‌ی $y = ax + b$ با شیب مثبت $(a > 0)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از این خط هستند و زاویه‌ی این خط با محور طول‌ها برابر θ است (C پای عمود از B بر خط افقی گذرنده از A است).

۱) شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، تانژانت زاویه‌ی θ را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

۴) از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویه‌ی آن با محور افقی به دست می‌آورید؟

فرض می‌کنیم $x_1 < x_2$ و $C(x_2, y_1)$.

۱) $a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

۲) $AC = x_2 - x_1$ و $BC = y_2 - y_1$

۳) $\tan\theta = BC/AC = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

۴) سمت راست دو تساوی (۱) و (۳) یکی است، پس:

$a = \tan\theta$؛ شیب خط (با شیب مثبت) برابر تانژانت زاویه‌ی تند خط با محور طول‌ها است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۱ صفحه ۸۹ **فعالیت**

یک خط دلخواه به معادله‌ی y = ax + b با شیب منفی (a < 0) در نظر بگیرید. فرض کنید A(x_1, y_1) و B(x_2, y_2) دو نقطه از این خط هستند و زاویه‌ی این خط با محور طول‌ها برابر زاویه‌ی باز θ است. ۱) شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، تانژانت pi − θ (زاویه‌ی A) را بر حسب مختصات A و B به دست آورید.

۴) از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب خط و tan(pi − θ) به دست می‌آورید؟

۵) با استفاده از (۴) چه رابطه‌ای بین شیب خط و تانژانت زاویه‌ی بین خط و محور طول‌ها به دست می‌آورید؟

خط نزولی است؛ پس y_1 − y_2 و x_1 − x_2 مختلف‌العلامت‌اند. مثلث ABC دارای زاویه‌ی pi − θ در رأس A (رأس پایین‌تر) است.

۱) a = (y_2 − y_1)/(x_2 − x_1) (عددی منفی)

۲) طول‌ها همواره مثبت‌اند: AC = |x_2 − x_1| و BC = |y_2 − y_1|

۳) tan(pi − θ) = BC/AC = |y_2 − y_1| / |x_2 − x_1| = −(y_2 − y_1)/(x_2 − x_1) (چون خارج‌قسمت اعداد مختلف‌العلامت منفی است)

۴) از (۱) و (۳):

tan(pi − θ) = −a

۵) چون tan(pi − θ) = −tan θ، نتیجه می‌شود tan θ = −a:

a = tan θ؛ برای هر خط (با شیب مثبت یا منفی) شیب برابر تانژانت زاویه‌ی خط با محور طول‌ها است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۲ صفحه ۹۰ **کار در کلاس**

۱) زاویه‌ی بین خط به معادله‌ی y = sqrt(3) x + 2 و محور طول‌ها چند رادیان است؟

۲) معادله‌ی خطی را بنویسید که در نقطه‌ای به طول −1، محور طول‌ها را قطع می‌کند و با آن زاویه‌ی 150° می‌سازد.

۳) شیب خط y = −4 چقدر است؟ زاویه‌ی بین خط y = −4 و محور طول‌ها چقدر است؟

---

۱) شیب خط sqrt(3) است، پس tan θ = sqrt(3) و زاویه‌ی تند با این تانژانت 60° است:

θ = pi/3 رادیان

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲) شیب: $m = \tan 150^\circ = \tan(\pi - \pi/6) = -\tan 30^\circ = -\sqrt{3}/3$. خط از نقطه‌ی $(-1, 0)$ می‌گذرد:

$y = -\sqrt{3}/3\,(x + 1)$ یا $y = -\sqrt{3}/3\,x - \sqrt{3}/3$

۳) خط $y = -4$ موازی محور طول‌ها است؛ پس شیب آن صفر و زاویه‌اش با محور طول‌ها صفر است.

شیب ۰ و زاویه ۰ درجه

---

۳۳ صفحه ۹۱ مسئله

در شکل‌های زیر (الف، ب و پ) زاویه‌ی بین خط و محور طول‌ها و شیب خط را به دست آورید.

روش: دو نقطه‌ی مشخص روی هر خط می‌خوانیم، شیب را از $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ حساب می‌کنیم و زاویه را از $m = \tan\theta$ به دست می‌آوریم:

- اگر $m > 0$: $\theta = \tan^{-1}(m)$ (زاویه‌ی تند)؛ مثلاً $m = 1$ به $\theta = 45^\circ$ می‌انجامد.
- اگر $m < 0$: $\theta = 180^\circ - \tan^{-1}(|m|)$ (زاویه‌ی باز)؛ مثلاً $m = -1$ به $\theta = 135^\circ$ می‌انجامد.
- اگر خط افقی باشد: $m = 0$ و $\theta = 0$.

چون شکل‌ها در دسترس نیستند، پاسخ با همین روش برای هر شکل به دست می‌آید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۴ صفحه ۹۱ مسئله

معادله‌ی خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویه‌ی 20° بسازد و از نقطه‌ی $(-1, 2)$ بگذرد. (برای محاسبه‌ی شیب خط می‌توانید از رسم به کمک نقاله یا ماشین‌حساب استفاده کنید.)

شیب: $m = \tan 20^\circ \sim 0.364$. معادله‌ی خط با شیب m که از $(-1, 2)$ می‌گذرد:

$y + 1 = 0.364\,(x - 2)$

$y \sim 0.364\,x - 1.728$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۵ صفحه ۹۱ مسئله

خطی که از دو نقطه‌ی (2, 1) و (5, −1) می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟ (از رسم خط و نقاله استفاده کنید.)

شیب خط:

m = (−1 − 1)/(5 − 2) = −2/3

چون شیب منفی است، زاویه باز است. زاویه‌ی تندی که تانژانت آن 2/3 است حدود 33.7° است؛ پس:

θ = 180° − 33.7° = 146.3°

زاویه‌ی خط با محور طول‌ها حدود ۱۴۶٫۳ درجه است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۶ صفحه ۹۱ مسئله

خط به معادله‌ی 2x + 3y = 4 در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع می‌کند و چه زاویه‌ای با آن می‌سازد؟

محور طول‌ها: y = 0، پس 2x = 4 و x = 2:

نقطه‌ی برخورد (2, 0)

شیب خط: y = −2/3 x + 4/3 پس m = −2/3. زاویه‌ی باز θ = 180° − tan^(−1)(2/3) ~ 180° − 33.7° = 146.3°.

زاویه‌ی خط با محور طول‌ها حدود ۱۴۶٫۳ درجه است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۷ صفحه ۹۱ مسئله

از برخورد دو خط با معادله‌های y = sqrt(3) x و y = −x + 5 و محور طول‌ها، یک مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را بر حسب رادیان به دست آورید.

رأس‌های مثلث: خط اول از مبدأ می‌گذرد (نقطه‌ی O(0, 0))؛ خط دوم محور را در B(5, 0) قطع می‌کند؛ و دو خط در نقطه‌ی P که از sqrt(3) x = −x + 5 به دست می‌آید یکدیگر را قطع می‌کنند: x = 5/(sqrt(3) + 1) ~ 1.83 و y ~ 3.17.

زاویه‌ی رأس O: شیب $\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi/3$ (60°).

زاویه‌ی رأس B: خط دوم شیب -1 و زاویه‌ی 135° با محور دارد؛ پس زاویه‌ی داخلی مثلث $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ یعنی $\pi/4$ است.

زاویه‌ی رأس P: $\pi - \pi/3 - \pi/4 = 5\pi/12$ (75°).

زاویه‌های مثلث: $\pi/3$، $\pi/4$ و $5\pi/12$ رادیان

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۳۸ صفحه ۹۱ مسئله

خط‌های به معادله‌ی $3x - 5y = c$ با هم (موازی‌اند / متقاطع‌اند). زاویه‌ی این خط‌ها با محور طول‌ها بر حسب درجه و رادیان به طور تقریبی چقدر است؟

همه‌ی این خط‌ها (به ازای مقادیر مختلف c) شیب یکسان دارند: $y = 3/5\,x - c/5$، $m = 3/5 = 0.6$؛ پس **موازی‌اند**.

$\tan\theta = 0.6 \Rightarrow \theta \sim 30.96^\circ \sim 31^\circ$ و بر حسب رادیان $\theta \sim 0.54$.

موازی‌اند؛ زاویه حدود ۳۱ درجه (حدود ۰٫۵۴ رادیان).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.